

**OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ  
ETAPA LOCALĂ – 15.02.2025****CLASA a X-a  
BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE****SUBIECTUL I (7 puncte)**Fie  $a, b, c \in (1, \infty)$ . Să se arate că:

$$\frac{\log_a b}{c} + \frac{\log_b c}{a} + \frac{\log_c a}{b} \geq \frac{9}{a+b+c}$$

**Soluție:**

Oficiu .....1p

Deoarece  $a, b, c \in (1, \infty) \Rightarrow \log_a b, \log_b c, \log_c a$  sunt numere pozitive.....1p

Aplicăm inegalitatea Titu Andreescu:

$$\frac{\log_a b}{c} + \frac{\log_b c}{a} + \frac{\log_c a}{b} = \frac{\sqrt{\log_a b}^2}{c} + \frac{\sqrt{\log_b c}^2}{a} + \frac{\sqrt{\log_c a}^2}{b} \geq \frac{(\sqrt{\log_a b} + \sqrt{\log_b c} + \sqrt{\log_c a})^2}{a+b+c} \geq \dots 2p$$

Apoi din inegalitatea mediilor:

$$\geq \frac{\left(3 \cdot \sqrt[3]{\sqrt{\log_a b \cdot \log_b c \cdot \log_c a}}\right)^2}{a+b+c} = \frac{9}{a+b+c} \dots 2p$$

Deoarece dacă schimbăm baza:  $\log_a b \cdot \log_b c \cdot \log_c a = \frac{\lg b}{\lg a} \cdot \frac{\lg c}{\lg b} \cdot \frac{\lg a}{\lg c} = 1$  .....1p**SUBIECTUL II (7 puncte)**

Arătați că:

$$\frac{{}^{2024}\sqrt{4} + {}^{2024}\sqrt{9} + {}^{2024}\sqrt{16}}{{}^{2024}\sqrt{6} + {}^{2024}\sqrt{8} + {}^{2024}\sqrt{12}} > \frac{{}^{2025}\sqrt{6} + {}^{2025}\sqrt{8} + {}^{2025}\sqrt{12}}{{}^{2025}\sqrt{4} + {}^{2025}\sqrt{9} + {}^{2025}\sqrt{16}}$$

**Soluție:**

Oficiu .....1p

Aplicăm inegalitatea  $ab + ac + bc \leq a^2 + b^2 + c^2$  .....1p ${}^{2024}\sqrt{2} = a, {}^{2024}\sqrt{3} = b, {}^{2024}\sqrt{4} = c$ , atunci membrul I al inegalității devine:



$$\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ac} > 1, \text{ pentru c\^a numerele } a, b, c \text{ sunt distincte} \dots\dots\dots 2p$$

Analog se procedează cu membrul drept al inegalității:

$^{2025}\sqrt{2} = x, ^{2025}\sqrt{3} = y, ^{2025}\sqrt{4} = z$ , atunci membrul I al inegalității devine:

$$\frac{xy+yz+xz}{x^2+y^2+z^2} < 1, \text{ pentru c\^a numerele } x, y, z \text{ sunt distincte.} \dots\dots\dots 2p$$

Finalizare .....1p

### **SUBIECTUL III (7 puncte)**

Fie  $z \in \mathbb{C}$  astfel încât  $|z| = 1$  și  $\bar{z} + z = 1$ . Calculați  $z^{2025} + \frac{1}{z^{2025}}$ .

**Soluție:**

Oficiu .....1p

Fie  $z = a + ib, a, b \in \mathbb{R}$ , din  $\bar{z} + z = 1 \Rightarrow a - ib + a + ib = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$  .....1p

Din  $|z| = 1 \Rightarrow a^2 + b^2 = 1 \Rightarrow b = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$  .....1p

Deci  $z = \frac{1}{2} \pm i \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow z^3 = -1 \Rightarrow z^{2025} = (z^3)^{675} = -1$  .....3p

Finalizare, valoarea expresiei este -2 .....1p

### **SUBIECTUL IV (7 puncte)**

Demonstrați că nu există funcții injective  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , cu proprietatea:

$$f(2023^x) + f(2025^x) = 2024, \quad (\forall) x \in \mathbb{R}$$

(Supliment Gazeta Matematică)

**Soluție:**

Oficiu .....1p

Presupunem, prin reducere la absurd că ar exista o asemenea funcție, pentru  $x=1 \Rightarrow$

$$f(2023) + f(2025) = 2024 \text{ iar pentru } x = \log_{2023} 2025 \Rightarrow$$

$$f(2023^{\log_{2023} 2025}) + f(2025^{\log_{2023} 2025}) = 2024 \dots\dots\dots 1p$$

$$\Rightarrow f(2025) + f(2025^{\log_{2023} 2025}) = 2024 \dots\dots\dots 1p$$

$$\Rightarrow f(2023) = f(2025^{\log_{2023} 2025}),$$

$$\text{deoarece } f \text{ injectiv\^a} \Rightarrow 2023 = 2025^{\log_{2023} 2025} \dots\dots\dots 2p$$

$$\text{Logaritm\^am ambii membri} \Rightarrow \log_{2023} 2023 = \log_{2023} 2025^{\log_{2023} 2025} \dots\dots\dots 1p$$

$$1 = (\log_{2023} 2025)^2, \text{ fals, deci nu exist\^a o asemenea funcție} \dots\dots\dots 1p$$